Compléments sur les variables aléatoires discrètes

Table des matières

1 Couples de variables aléatoires discrètes **2**
- 1.1 Définitions . . . 2
  - 1.1.1 Loi d'un couple de variables aléatoires discrètes . . . 2
  - 1.1.2 Lois conditionnelles . . . 2
  - 1.1.3 Lois marginales . . . 3
  - 1.1.4 Indépendance de deux variables aléatoires discrètes . . . 4
- 1.2 Fonction d'un couple de variables aléatoires discrètes . . . 5
  - 1.2.1 Généralités . . . 5
  - 1.2.2 Loi du maximum de deux variables aléatoires indépendantes . . . 5
  - 1.2.3 Loi du minimum de deux variables aléatoires indépendantes . . . 5
  - 1.2.4 Loi d'une somme de deux variables aléatoires indépendantes . . . 6
- 1.3 Espérance . . . 7
  - 1.3.1 Généralités . . . 7
  - 1.3.2 Cas de l'indépendance de deux variables aléatoires . . . 8

2 Suites de variables aléatoires discrètes **9**
- 2.1 Indépendance mutuelle . . . 9
- 2.2 Somme de variables aléatoires . . . 9
- 2.3 Espérance et variance d'une somme . . . 10

3 Convergences et approximations **11**
- 3.1 Inégalités probabilistes . . . 11
  - 3.1.1 Inégalité de Markov . . . 11
  - 3.1.2 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev . . . 12
- 3.2 Loi faible des grands nombres . . . 12
- 3.3 Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson . . . 13

1 Couples de variables aléatoires discrètes

1.1 Définitions

1.1.1 Loi d'un couple de variables aléatoires discrètes

Définition 1.1 : *Couple de variables aléatoires*

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur $(\Omega, \mathcal{A})$. On appelle **couple de variables aléatoires discrètes** définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$ toute application :

$$\begin{array}{rcl} \Omega & \to & \mathbb{R}^2 \\ \omega & \mapsto & (X(\omega), Y(\omega)) \end{array}$$

Définition 1.2 : *Loi conjointe*

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On appelle **loi du couple** (X, Y) (ou loi conjointe des variables aléatoires X et Y) l'application $\mathcal{L}$ définie par :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L} : X(\Omega) \times Y(\Omega) & \to & [0,1] \\ (x, y) & \mapsto & \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) \end{array}$$

On note aussi la loi conjointe $\mathbb{P}([X = x], [Y = y])$ ou, plus simplement $\mathbb{P}(X = x, Y = y)$.

Exemple 1. *On lance deux dés équilibrés à 6 faces (l'un est bleu, l'autre blanc). On appelle X (resp. Y) le numéro obtenu avec le dé bleu (resp. blanc). Comme X et Y sont des variables aléatoires discrètes, alors (X, Y) est un couple de variables aléatoires discrètes. On a la loi du couple (X, Y) :*

$$\forall (i,j) \in [\![1,6]\!]^2, \quad \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \frac{1}{36}.$$

Exemple 2. *On lance les mêmes dés que dans l'exemple précédent. Cette fois, on appelle X le plus petit des deux numéros obtenus et Y le plus grand numéro obtenu (si les numéros sont égaux, X et Y prennent la valeur commune). Comme X et Y sont des variables aléatoires discrètes, alors (X, Y) est un couple de variables aléatoires discrètes. On a la loi du couple (X, Y) :*

$$\forall (i,j) \in [\![1,6]\!]^2, \quad \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \begin{cases} \frac{1}{36}, & \text{si } i = j \\ \frac{1}{18}, & \text{si } i < j \\ 0, & \text{si } i > j. \end{cases}$$

1.1.2 Lois conditionnelles

Définition 1.3 : *Loi conditionnelle*

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose que :

$$\forall y \in Y(\Omega), \quad \mathbb{P}(Y = y) \neq 0.$$

On appelle loi de X **conditionnellement à l'événement** $[Y = y]$ l'application $\mathcal{L}_{[Y=y]}$ définie par :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L}_{[Y=y]} : X(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathbb{P}_{[Y=y]}(X = x) \end{array}$$

On définit de manière similaire la loi conditionnelle de Y sachant $[X = x]$.

1.1.3 Lois marginales

Théorème 1.4 : *Loi marginale*

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes. Les lois de X et Y, appelées **lois marginales**, sont données par les formules suivantes

$$\forall x \in X(\Omega), \quad \mathbb{P}(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]),$$

$$\forall y \in Y(\Omega), \quad \mathbb{P}(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]).$$

La connaissance des lois marginales ne suffit cependant pas à reconstituer la loi conjointe du couple, sauf dans le cas où elles sont indépendantes.

Démonstration. D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $([Y = y])_{y \in Y(\Omega)}$, on obtient pour $x \in X(\Omega)$:

$$\mathbb{P}(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]).$$

On raisonne de manière similaire pour la loi de Y. □

Méthode 1.5 : *Comment déterminer les lois marginales avec la loi du couple ?*

Une fois que l'on a déterminé la loi du couple, on peut déterminer les lois marginales. La loi de X s'écrit

$$\forall x \in X(\Omega), \quad \mathbb{P}(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]).$$

À noter que même si $Y(\Omega)$ n'est pas fini, la série converge puisque l'on calcule la probabilité d'un événement (qui existe donc).

Exemple 3. *On reprend l'exemple précédent : on lance deux dés (X le plus petit des deux numéros obtenus et Y le plus grand numéro obtenu). On rappelle la loi du couple (X, Y) :*

$$\forall (i, j) \in [\![1, 6]\!]^2, \quad \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \begin{cases} \frac{1}{36}, & \text{si } i = j \\ \frac{1}{18}, & \text{si } i < j \\ 0, & \text{si } i > j. \end{cases}$$

Ainsi, puisque $Y(\Omega) = [\![1, 6]\!]$,

- *pour $i \in [\![1, 5]\!]$,*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = i) &= \sum_{j=1}^{6} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = i]) + \sum_{j=i+1}^{6} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) \\ &= \frac{1}{36} + \frac{6 - i}{18} = \frac{13 - 2i}{36}, \end{aligned}$$

- *pour $i = 6$,*

$$\mathbb{P}(X = 6) = \sum_{j=1}^{6} \mathbb{P}([X = 6] \cap [Y = j]) = \mathbb{P}([X = 6] \cap [Y = 6]) = \frac{1}{36}.$$

Méthode 1.6 : *Loi marginale et loi conditionnelle*

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes. Si l'on connaît la loi marginale de Y, ainsi que la loi conditionnelle de X sachant que $[Y=y]$ est réalisé alors la loi de X est déterminée par :

$$\forall x \in X(\Omega), \quad \mathbb{P}(X=x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(Y=y)\,\mathbb{P}_{[Y=y]}(X=x).$$

Exemple 4. *Soient $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ pour $\lambda > 0$ et pour $k \in \mathbb{N}$ et $p \in]0,1[$, la loi de X sachant que $[Y=k]$ est réalisé est la loi $\mathcal{B}(k,p)$. Donner la loi de X.*

Solution.

1.1.4 Indépendance de deux variables aléatoires discrètes

Définition 1.7 : *Indépendance de deux variables aléatoires discrètes*

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes. On dit que X et Y sont **indépendantes** lorsque

$$\forall (x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad \mathbb{P}([X=x] \cap [Y=y]) = \mathbb{P}(X=x)\,\mathbb{P}(Y=y).$$

Exemple 5. *On lance deux dés équilibrés à 6 faces (l'un est bleu, l'autre blanc). On appelle X (resp. Y) le numéro obtenu avec le dé bleu (resp. blanc). On rappelle la loi du couple (X,Y) :*

$$\forall (i,j) \in [\![1,6]\!]^2, \quad \mathbb{P}([X=i] \cap [Y=j]) = \frac{1}{36}.$$

On a les lois marginales :

$$\forall i \in [\![1,6]\!], \quad \mathbb{P}(X=i) = \frac{1}{6}.$$

$$\forall j \in [\![1,6]\!], \quad \mathbb{P}(Y=j) = \frac{1}{6}.$$

Comme $\forall (i,j) \in [\![1,6]\!]^2, \quad \mathbb{P}([X=i] \cap [Y=j]) = \mathbb{P}(X=i)\,\mathbb{P}(Y=j)$, on en déduit que X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes.

Proposition 1.8 : *Indépendance de deux variables aléatoires discrètes*

Si (X,Y) est un couple de variables aléatoires discrètes indépendantes, alors pour tous intervalles réels I et J,

$$\mathbb{P}\left([X \in I] \cap [Y \in J]\right) = \mathbb{P}\left(X \in I\right)\,\mathbb{P}\left(Y \in J\right).$$

Théorème 1.9 : *Lemme des coalitions*

Si (X,Y) est un couple de variables aléatoires discrètes indépendantes et f, g deux fonctions réelles, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont des variables aléatoires discrètes indépendantes.

Démonstration. Admis. □

1.2 Fonction d'un couple de variables aléatoires discrètes

1.2.1 Généralités

Proposition 1.10 : *Fonction d'un couple de variables aléatoires discrètes*

Soient (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes et g une application de $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$. La variable aléatoire $Z = g(X, Y)$ est alors également discrète.

En particulier, si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes, alors $X + Y$, XY, $\max(X, Y)$ et $\min(X, Y)$ sont aussi des variables aléatoires discrètes.

1.2.2 Loi du maximum de deux variables aléatoires indépendantes

Méthode 1.11 : *Comment déterminer la loi de* $\max(X, Y)$*, si* X *et* Y *sont indépendantes ?*

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour trouver la loi de $S = \max(X, Y)$, on utilise la fonction de répartition, après avoir justifié l'égalité suivante :

$$\forall k \in S(\Omega),\ [S \leq k] = [X \leq k] \cap [Y \leq k].$$

On obtient alors la loi de S à partir de l'égalité suivante, valable pour tout élément k de $S(\Omega)$:

$$\mathbb{P}(S = k) = \mathbb{P}(S \leq k) - \mathbb{P}(S \leq k - 1).$$

Exemple 6. *Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire au hasard deux boules, avec remise de la boule tirée. On note X la variable aléatoire égale au numéro de la première boule et Y la variable aléatoire égale au numéro de la deuxième boule. On pose $S = \max(X, Y)$, ce qui signifie que*

$$\forall \omega \in \Omega,\ S(\omega) = \max(X(\omega), Y(\omega)).$$

Donner la loi de S.

Solution.

1.2.3 Loi du minimum de deux variables aléatoires indépendantes

Méthode 1.12 : *Comment déterminer la loi de* $\min(X, Y)$*, si* X *et* Y *sont indépendantes ?*

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour trouver la loi de $I = \min(X, Y)$, on utilise la fonction de répartition de manière différente que dans le cas $\max(X, Y)$, après avoir justifié l'égalité suivante :

$$\forall k \in I(\Omega),\ [I > k] = [X > k] \cap [Y > k].$$

On obtient alors la loi de I à partir de l'égalité suivante, valable pour tout élément k de $I(\Omega)$:

$$\mathbb{P}(I = k) = \mathbb{P}(I \leq k) - \mathbb{P}(I \leq k - 1) = \mathbb{P}(I > k - 1) - \mathbb{P}(I > k).$$

Exemple 7. *Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire au hasard deux boules, avec remise de la boule tirée. On note X la variable aléatoire égale au numéro de la première boule et Y la variable aléatoire égale au numéro de la deuxième boule. On pose $I = \min(X, Y)$, ce qui signifie que*

$$\forall \omega \in \Omega,\ I(\omega) = \min(X(\omega), Y(\omega)).$$

Donner la loi de I.

Solution.

1.2.4 Loi d'une somme de deux variables aléatoires indépendantes

Proposition 1.13 : *Loi d'une somme de deux variables aléatoires discrètes et indépendantes*

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes et indépendantes. La loi de $X+Y$ est donnée par l'égalité suivante : pour $z \in (X+Y)(\Omega)$,

$$\mathbb{P}(X+Y=z) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X=x)\,\mathbb{P}(Y=z-x).$$

Démonstration. D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $([X=x])_{x\in X(\Omega)}$, on obtient pour $z \in (X+Y)(\Omega)$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X+Y=z) &= \sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}([X=x]\cap[X+Y=z]) \\ &= \sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}([X=x]\cap[Y=z-x])\end{aligned}$$

Comme X et Y sont indépendantes,

$$\mathbb{P}(X+Y=z) = \sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}(X=x)\,\mathbb{P}(Y=z-x).$$

□

Il faut faire attention car dans cette somme certains termes peuvent être nuls. En effet, si $z-x \notin Y(\Omega)$, alors $\mathbb{P}(Y=z-x)=0$. On peut donc réécrire, pour $z \in (X+Y)(\Omega)$, la loi de la somme de la manière suivante :

$$\mathbb{P}(X+Y=z) = \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ z-x\in Y(\Omega)}} \mathbb{P}(X=x)\,\mathbb{P}(Y=z-x).$$

Théorème 1.14 : *Stabilité de la loi de Poisson par l'addition*

Soient $\lambda, \mu > 0$. Si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes telles que $X_1 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$, alors

$$X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda+\mu).$$

Démonstration. D'après la proposition 1.13, pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1+X_2=k) &= \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1=j)\,\mathbb{P}(X_2=k-j) \\ &= \sum_{j=0}^{k} \mathbb{P}(X_1=j)\,\mathbb{P}(X_2=k-j) \quad \text{car } k-j\geq 0 \text{ puisque } X_2(\Omega)=\mathbb{N}, \\ &= \sum_{j=0}^{k} \left(e^{-\lambda}\frac{\lambda^j}{j!}\right)\left(e^{-\mu}\frac{\mu^{k-j}}{(k-j)!}\right) \\ &= e^{-(\lambda+\mu)}\left(\sum_{j=0}^{k}\frac{\lambda^j}{j!}\,\frac{\mu^{k-j}}{(k-j)!}\right) \\ &= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!}\left(\sum_{j=0}^{k}\frac{k!}{j!(k-j)!}\lambda^j\mu^{k-j}\right) \\ &= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!}(\lambda+\mu)^k \quad \text{d'après la formule du binôme de Newton.}\end{aligned}$$

□

Théorème 1.15 : *Stabilité de la loi binomiale par l'addition*

Si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes telles que $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1, p)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_2, p)$, alors

$$X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1 + n_2, p).$$

Démonstration. D'après la proposition 1.13, pour $k \in [\![0, n_1 + n_2]\!]$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 + X_2 = k) &= \sum_{j=0}^{n_1} \mathbb{P}(X_1 = j)\,\mathbb{P}(X_2 = k - j) \\
&= \sum_{j=0}^{k} \mathbb{P}(X_1 = j)\,\mathbb{P}(X_2 = k - j) \quad \text{car } k - j \geq 0 \text{ puisque } X_2(\Omega) = [\![0, n_2]\!], \\
&= \sum_{j=0}^{k} \left(\binom{n_1}{j} p^j (1-p)^{n_1 - j}\right) \left(\binom{n_2}{k-j} p^{k-j} (1-p)^{n_2 - (k-j)}\right) \\
&= p^k (1-p)^{(n_1+n_2)-k} \left(\sum_{j=0}^{k} \binom{n_1}{j}\binom{n_2}{k-j}\right)
\end{aligned}$$

Or, d'après la formule de Vandermonde (voir chapitre Calcul de sommes et de produits),

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{n_1}{j}\binom{n_2}{k-j} = \binom{n_1 + n_2}{k}.$$

Par conséquent,

$$\forall k \in [\![0, n_1 + n_2]\!], \quad \mathbb{P}(X_1 + X_2 = k) = \binom{n_1 + n_2}{k} p^k (1-p)^{(n_1+n_2)-k}.$$

□

1.3 Espérance

1.3.1 Généralités

Propriété 1.16 : *Rappel : linéarité de l'espérance*

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes admettant une espérance et a, b des réels, alors $aX + bY$ admet une espérance et

$$\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y).$$

Propriété 1.17 : *Rappel : croissance de l'espérance*

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes admettant une espérance telles que

$$\forall \omega \in \Omega,\ X(\omega) \leq Y(\omega),$$

alors

$$\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y).$$

Exemple 8. *D'après les exemples 6 et 7, $I \leq S$ presque sûrement. Par conséquent,*

$$\mathbb{E}(I) \leq \mathbb{E}(S).$$

Théorème 1.18 : *Théorème de transfert*

Si (X, Y) est un couple de variables aléatoires discrètes et g une fonction réelle, alors sous réserve d'existence

$$\mathbb{E}(g(X,Y)) = \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} g(x,y)\,\mathbb{P}([X=x]\cap[Y=y]).$$

Démonstration. Admis. □

Exemple 9. *En reprenant les exemples 6 et 7, déterminer l'espérance de* $I = \min(X, Y)$ *et de* $S = \max(X, Y)$.

Solution.

Exemple 10. *Soit* (X, Y) *un couple de variables aléatoires discrètes telle que*

$$\forall (i,j)\in[\![1,2]\!]^2,\quad \mathbb{P}([X=i]\cap[Y=j]) = \begin{cases} \frac{i}{4} \text{ si } i=j,\\ \frac{1}{4} \text{ si } i<j,\\ 0 \text{ si } i>j. \end{cases}$$

Calculer $\mathbb{E}(XY)$.

Solution.

1.3.2 Cas de l'indépendance de deux variables aléatoires

Théorème 1.19 : *Indépendance et espérance*

Si (X, Y) est un couple de variables aléatoires discrètes et indépendantes qui admettent une espérance, alors la variable aléatoire XY admet une espérance et

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y).$$

Démonstration. D'après le théorème de transfert appliqué à la fonction $g(x, y) = xy$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(XY) &= \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} xy\,\mathbb{P}([X=x]\cap[Y=y])\\ &= \sum_{x\in X(\Omega)}\sum_{y\in Y(\Omega)} xy\,\mathbb{P}(X=x)\,\mathbb{P}(Y=y) \quad \text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes}\\ &= \left(\sum_{x\in X(\Omega)} x\,\mathbb{P}(X=x)\right)\left(\sum_{y\in Y(\Omega)} y\,\mathbb{P}(Y=y)\right)\\ &= \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y) \end{aligned}$$

□

Corollaire 1.20 : *Indépendance et variance*

Si (X, Y) est un couple de variables aléatoires discrètes et indépendantes admettant une variance, alors

$$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y).$$

Démonstration. Les variables aléatoires X^2 et Y^2 admettent une espérance donc par linéarité, $2(X^2 + Y^2)$ également. De plus, pour $\omega \in \Omega$, $2X(\omega)Y(\omega) \leq X^2(\omega) + Y^2(\omega)$ donc $0 \leq (X+Y)^2(\omega) \leq 2(X^2+Y^2)(\omega)$.

Ainsi, d'après la propriété d'existence d'une espérance par domination, $(X+Y)^2$ admet une espérance et donc $X+Y$ admet une variance. D'après la formule de Koenig-Huygens, on a par linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X+Y) &= \mathbb{E}\left((X+Y)^2\right) - (\mathbb{E}(X+Y))^2 \\
&= \mathbb{E}\left(X^2+2XY+Y^2\right) - (\mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y)))^2 \\
&= \mathbb{E}\left(X^2\right) + 2\,\mathbb{E}\left(XY\right) + \mathbb{E}\left(Y^2\right) - \mathbb{E}\left(X\right)^2 - 2\mathbb{E}\left(X\right)\mathbb{E}\left(Y\right) - \mathbb{E}\left(Y\right)^2 \\
&= \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\left(\mathbb{E}\left(XY\right) - \mathbb{E}\left(X\right)\mathbb{E}\left(Y\right)\right) \\
&= \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) \quad \text{d'après le théorème 1.19}
\end{aligned}$$

□

2 Suites de variables aléatoires discrètes

2.1 Indépendance mutuelle

Définition 2.1 : *Indépendance mutuelle de n variables aléatoires discrètes*

Soient X_1, X_2, …, X_n des variables aléatoires discrètes. On dit que X_1, X_2, …, X_n sont **mutuellement indépendantes** lorsque

$$\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega), \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i = x_i]\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(X_i = x_i\right).$$

Proposition 2.2 : *Indépendance mutuelle de n variables aléatoires discrètes*

Si X_1, X_2, …, X_n sont des variables aléatoires discrètes et mutuellement indépendantes, alors pour tous intervalles réels I_1, I_2, …, I_n :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i \in I_i]\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(X_i \in I_i\right).$$

Démonstration. Admis. □

Exemple 11. *Une urne contient n boules numérotées de 1 à n ($n \geq 2$). On tire au hasard m boules ($m \geq 1$), avec remise après chaque tirage de la boule tirée. Pour $i \in [\![1, m]\!]$, on note X_i la variable aléatoire égale au numéro de la i^{eme} boule. On pose $S = \max(X_1, X_2, \ldots, X_m)$, ce qui signifie que :*

$$\forall \omega \in \Omega,\ S(\omega) = \max\left(X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_m(\omega)\right).$$

Donner la loi de S.

Solution.

2.2 Somme de variables aléatoires

Proposition 2.3 : *Somme de variables aléatoires*

Si X_1, X_2, …, X_m sont des variables aléatoires discrètes, alors $\sum_{i=1}^{m} X_i$ est une variable aléatoire discrète.

Démonstration. On démontre ce résultat par récurrence en utilisant la proposition 1.10. □

Théorème 2.4 : *Stabilité de la loi de Poisson par l'addition*

Si X_1, X_2, …, X_m sont des variables aléatoires discrètes et mutuellement indépendantes telles que pour $i \in [\![1, m]\!]$, $X_i \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_i)$ avec $\lambda_i > 0$, alors

$$\sum_{i=1}^{m} X_i \hookrightarrow \mathcal{P}\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i\right).$$

Démonstration. On démontre ce résultat par récurrence avec le théorème 1.14. □

Théorème 2.5 : *Stabilité de la loi binomiale par l'addition*

Si X_1, X_2, …, X_m sont des variables aléatoires discrètes et mutuellement indépendantes telles que pour $i \in [\![1, m]\!]$, $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(n_i, p)$, alors

$$\sum_{i=1}^{m} X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\left(\sum_{i=1}^{m} n_i\right), p\right).$$

Démonstration. On démontre ce résultat par récurrence avec le théorème 1.15. □

En particulier, si les variables aléatoires X_1, X_2, …, X_n sont mutuellement indépendantes et suivent toutes la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, alors

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p).$$

Une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre (n, p) peut toujours s'écrire comme somme de n variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une loi de Bernoulli de même paramètre p.

2.3 Espérance et variance d'une somme

Propriété 2.6 : *Linéarité de l'espérance*

Si X_1, X_2, …, X_m sont des variables aléatoires discrètes qui admettent une espérance, alors

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{m} X_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{E}\left(X_i\right).$$

Démonstration. On démontre ce résultat par récurrence avec la propriété 1.16. □

Propriété 2.7 : *Indépendance mutuelle et variance*

Si X_1, X_2, …, X_m sont des variables aléatoires discrètes et mutuellement indépendantes qui admettent une variance, alors

$$\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{m} X_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{V}\left(X_i\right).$$

Démonstration. On démontre ce résultat par récurrence avec le corollaire 1.20. □

3 Convergences et approximations

3.1 Inégalités probabilistes

3.1.1 Inégalité de Markov

Théorème 3.1 : *Inégalité de Markov*

Si X est une variable aléatoire discrète et positive qui admet une espérance, alors

$$\forall \lambda > 0, \quad \mathbb{P}(X \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{\lambda}.$$

Démonstration. Si X est une variable aléatoire discrète et positive,

$$X(\Omega) = \{x_i \geq 0, i \in I \subset \mathbb{N}\}.$$

On pose $J = \{i \in I, x_i \geq \lambda\}$ de telle sorte que :

$$[X \geq \lambda] = \bigcup_{i \in J} [X = x_i].$$

Ainsi, comme union incompatible d'événements,

$$\mathbb{P}(X \geq \lambda) = \sum_{i \in J} \mathbb{P}(X = x_i).$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{i \in I} x_i \mathbb{P}(X = x_i) \text{ car } X \text{ admet une espérance,} \\
&\geq \sum_{i \in J} x_i \mathbb{P}(X = x_i) \text{ car } J \subset I \text{ et } x_i \mathbb{P}(X = x_i) \geq 0, \\
&\geq \sum_{i \in J} \lambda \mathbb{P}(X = x_i) \text{ car pour } i \in J,\ x_i \geq \lambda, \\
&\geq \lambda\, \mathbb{P}(X \geq \lambda).
\end{aligned}$$

On conclut donc que $\mathbb{P}(X \geq \lambda) \leq \dfrac{\mathbb{E}(X)}{\lambda}$ car $\lambda > 0$. □

Proposition 3.2 : *Inégalité de Markov et moments*

Pour $r \in \mathbb{N}^*$, si X est une variable aléatoire discrète qui admet un moment d'ordre r, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{m_r(|X|)}{\varepsilon^r}.$$

Démonstration. $|X|^r$ est une variable aléatoire discrète et positive admettant une espérance donc d'après l'inégalité de Markov,

$$\forall \lambda > 0, \quad \mathbb{P}(|X|^r \geq \lambda) \leq \frac{m_r(|X|)}{\lambda}.$$

Comme $t \mapsto t^{1/r}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$[|X|^r \geq \lambda] = [|X| \geq \lambda^{1/r}].$$

En posant $\varepsilon = \lambda^{1/r}$, on obtient :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{m_r(|X|)}{\varepsilon^r}.$$

□

3.1.2 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Théorème 3.3 : *Inégalité de Bienaymé-Tchebychev*

Si X est une variable aléatoire discrète qui admet un moment d'ordre 2, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

Démonstration. La variable aléatoire $X - \mathbb{E}(X)$ admet un moment d'ordre 2 égal à $\mathbb{V}(X)$. On applique directement la proposition 3.2 avec $r = 2$ pour obtenir l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. □

Exemple 12. *Lors d'une saison de football, le nombre moyen de buts par match est de* 2.5*, avec une variance de* 1.1*. Majorer la probabilité que le match suivant ne se termine pas avec deux ou trois buts.*

Solution.

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev n'est pas très précise, elle donne un résultat grossier qui donne simplement une vague idée de la situation. Par contre, elle ne demande pas de connaître la loi de probabilité de la variable. Quand on connaît cette loi, on obtient des résultats bien meilleurs.

3.2 Loi faible des grands nombres

Théorème 3.4 : *Loi faible des grands nombres*

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires discrètes et indépendantes admettant toutes la même espérance m et même variance σ^2. On pose :

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}.$$

Dans ce cas,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - m\right| \geq \varepsilon\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Autrement dit, $\overline{X}_n$ "converge en probabilité" (cette notion viendra en deuxième année) vers la variable aléatoire certaine égale à m.

Démonstration. $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ est une somme de variables aléatoires discrètes et mutuellement indépendantes admettant chacune une espérance et une variance donc, d'après les propriétés 2.6 et 2.7, $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ admet une espérance et une variance. Ainsi,

$$\mathbb{E}(\overline{X}_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(X_k) = \frac{nm}{n} = m \text{ et } \mathbb{V}(\overline{X}_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{V}(X_k) = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}.$$

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

Par le théorème d'encadrement, on conclut que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - m\right| \geq \varepsilon\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

□

Remarque 3.5 : *Interprétation de la loi faible des grands nombres*

La loi faible des grands nombres s'écrit aussi :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - m\right| < \varepsilon\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Cela signifie qu'en répétant un grand nombre de fois une expérience aléatoire et en prenant la moyenne des résultats obtenus, on obtient une valeur très proche de l'espérance.

Corollaire 3.6 : *Loi faible des grands nombres pour la loi binomiale*

On considère une expérience de Bernoulli répétée indéfiniment et indépendamment dont la probabilité de succès est p. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note S_n le nombre de succès obtenus lors des n premières expériences. Sous ces conditions,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Démonstration. On note X_i la variable aléatoire égale à 1 si la i-ème expérience est un succès et 0 sinon, ainsi $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$. On a :

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n.$$

On remarque que $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$. On applique la loi faible des grands nombres à la suite de variable aléatoires indépendantes $(X_i)_{i\geq 1}$ admettant toutes la même espérance et variance pour obtenir :

$$\overline{X}_n = \frac{S_n}{n}.$$

□

En répétant un grand nombre de fois une expérience de Bernoulli et en prenant la fréquence $\dfrac{S_n}{n}$ des résultats obtenus, on obtient une valeur très proche de l'espérance p.

3.3 Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

Proposition 3.7 : *Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson*

Soient $\lambda > 0$ et $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires discrètes telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, p_n\right).$$

On suppose de plus que $\lim\limits_{n\to+\infty} n\,p_n = \lambda$. Sous ces hypothèses,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X = k) \text{ avec } X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda).$$

On applique souvent ce résultat avec $p_n = \dfrac{\lambda}{n}$.

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé. Pour $n \geq k$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_n = k) &= \binom{n}{k} p_n^k \left(1-p_n\right)^{n-k} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} p_n^k \, e^{(n-k)\ln(1-p_n)} \\
&= \frac{(np_n)^k}{k!} \left(\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k}\right) e^{(n-k)\ln(1-p_n)}.
\end{aligned}$$

Or, $n(n-1)\dots(n-k+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} n^k$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} = 1.$$

D'autre part, puisque $\lim_{n\to+\infty} p_n = 0$,

$$(n-k)\ln(1-p_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -np_n$$

Comme $-np_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\lambda$, on conclut que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\lambda}.$$

□

Remarque 3.8 : *Approximation*

Pour n assez grand et p proche de 0 tel que $n\,p$ ne soit pas trop grand, on peut approcher la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ par une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ où $\lambda = n\,p$ (on conserve l'espérance).

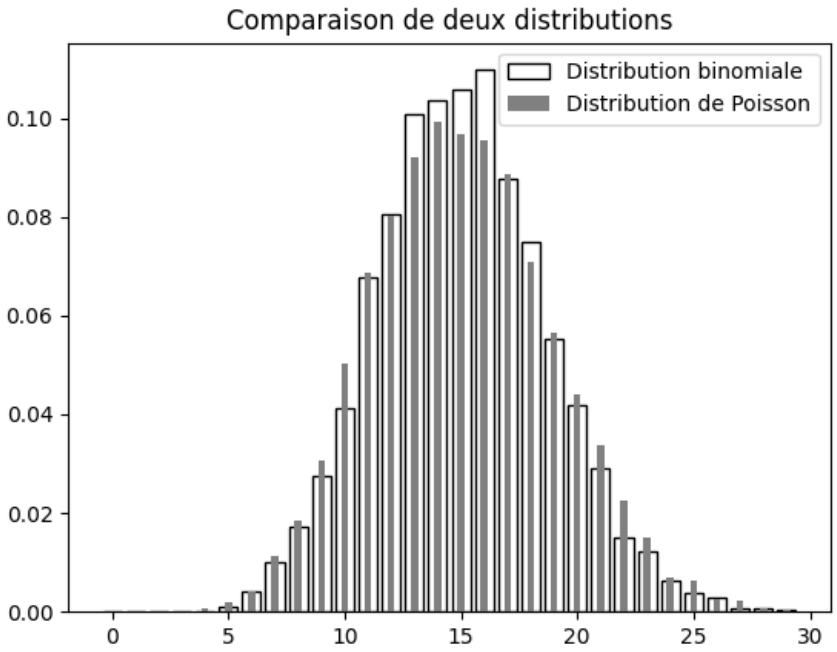
On dit que la loi de Poisson est la loi des "événements rares".

Exemple 13. *Dans une urne contenant des boules blanches ou rouges, la proportion de boules blanches est p, on tire n boules avec remise. Si n assez grand et p proche de 0, la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées suivra approximativement une loi de Poisson de paramètre np.*

Exemple 14. *Vérifions graphiquement la qualité de l'approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson. On simule* 5000 *réalisations d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres* 150 *et* $\frac{1}{10}$ *et* 5000 *réalisations d'une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre* 15.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
import matplotlib.pyplot as plt
X=rd.binomial(150,0.1,5000)
Y=rd.poisson(15,5000)
A=np.arange(-0.5,30)
plt.hist(X,A)
plt.hist(Y,A')
plt.show()
```

On remarque dans le graphique suivant que les deux distributions sont proches, témoignant d'un comportement pratiquement similaire.



Afin d'avoir le code complet, on modifie les 3 dernières lignes du code précédent afin d'avoir un titre, une légende et une superposition lisible des histogrammes. Ces modifications sont hors programme.

```
plt.hist(X,A,color='white',edgecolor='black',rwidth=0.8,density=True,label=
'Distribution binomiale')
plt.hist(Y,A,color='grey',rwidth=0.3,density=True,label='Distribution de Poisson')
plt.title('Comparaison de deux distributions')
plt.legend()
plt.show()
```